

5. Énoncés des exercices

Exercice 14.1 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 4$.

Tracer la représentation graphique de f . Calculer $\int_0^3 f(t)dt$.

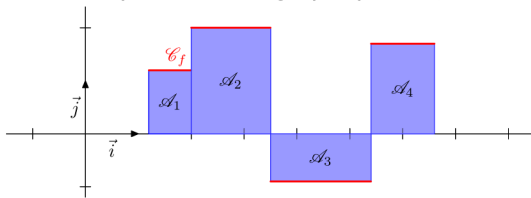
On rappelle que l'aire d'un trapèze peut se calculer avec la formule : $\mathcal{A} = \text{hauteur} \times \frac{\text{petite base} + \text{grande base}}{2}$

Exercice 14.2 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ 4 & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Tracer la représentation graphique de f . Calculer $\int_{-5}^5 f(t)dt$.

Exercice 14.3 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1,2 \\ 1,25 & \text{si } 1,2 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3,5 \\ -1 & \text{si } 3,5 \leq x \leq 5,3 \\ 1,75 & \text{si } 5,3 \leq x \leq 6,6 \\ 0 & \text{si } x > 6,6 \end{cases}$

Voici la représentation graphique de f :



Calculer $\int_0^8 f(t)dt$.

Exercice 14.4 Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^\pi (\cos 2t - \sin t)dt$
2. $\int_0^{-\frac{\pi}{2}} (\sin(3u) - 4 \cos(u))du$
3. $\int_0^\pi (\cos 3x)dx$
4. $\int_{-1}^0 e^{-2x+1}dx$

Exercice 14.5 Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^1 \frac{2x-3}{5}dx$
2. $\int_0^1 e^{3x}dx$
3. $\int_0^1 \sqrt{e^x}dx$

Exercice 14.6 1. Calculer $\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2t-1)dt$ et $\int_{\frac{1}{2}}^3 (-2t+1)dt$

2. En déduire la valeur de $\int_{-1}^3 |-2t+1|dt$

Exercice 14.7 Partie A : Démonstration.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$.

1. Démontrer que pour tout $x \in [a; b]$, $u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$

2. En déduire que $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

Partie B : Applications.

Les questions de cette partie sont indépendantes entre elles.

1. Calculer $\int_0^1 xe^x dx$

2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(2x) dx$

3. Reprendre deux fois de suite la méthode de la partie A pour calculer $I = \int_0^1 x^2 e^x dx$ et $J = \int_{-1}^0 t^2 e^{\frac{t}{2}} dt$

4. Reprendre la méthode de la partie A pour calculer $\int_0^x (t+1)e^t dt$;
en déduire la primitive de la fonction $x \mapsto (x+1)e^x$ qui vaut 1 en 0.

Exercice 14.8 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-2}^3 (x+1)e^x dx$

2. $\int_1^e x^2 \ln(x) dx$

3. $\int_1^9 x\sqrt{x} dx$

Exercice 14.9 Pour n entier on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$

1. Calculer $I_0 = \int_0^1 e^x dx$

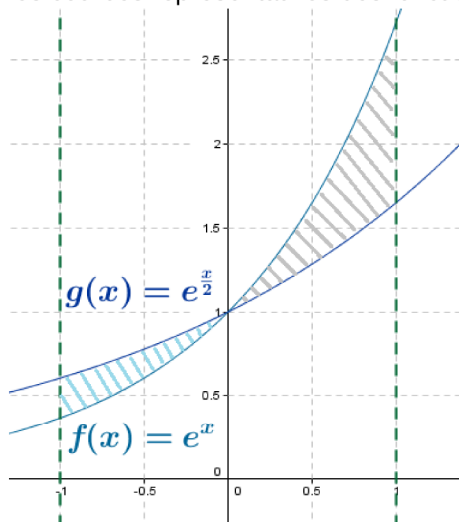
2. En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

3. En déduire I_1 , I_2 et I_3 .

Exercice 14.10 Déterminer la valeur moyenne de f sur I dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \cos(2x)$, $I = [0; \pi]$

2. $f(x) = 2x^2 + x - 2$, $I = [-1; 1]$

Exercice 14.11 Soient f et g deux fonctions définies sur $[-1; 1]$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{\frac{x}{2}}$. Soient $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonale $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Soit $\mathcal{A}_1$ l'aire de la partie du plan déterminée par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$. Calculer $\mathcal{A}_1$.
2. Soit $\mathcal{A}_2$ l'aire de la partie du plan déterminée par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Calculer $\mathcal{A}_2$.

Exercice 14.12 Le but de l'exercice est de donner un encadrement du nombre I défini par : $\int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1+x} dx$.

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[0; 1]$.
2. On pose, pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{5}\right)$
 - (a) Justifier que pour tout entier k compris entre 0 et 4, on a : $\frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x} dx \leq \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right)$
Interpréter graphiquement à l'aide de rectangles les inégalités précédentes.
 - (b) En déduire que : $\frac{1}{5} S_4 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx \leq \frac{1}{5} (S_5 - 1)$
 - (c) Donner des valeurs approchées à 10^{-4} près de S_4 et S_5 .
En déduire l'encadrement : $1,091 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx \leq 1,164$
3. (a) Démontrer que pour tout réel x de $[0; 1]$, on a : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$
 - (b) Justifier l'égalité $\int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx + I$
 - (c) Calculer $\int_0^1 (1-x)e^x dx$
 - (d) En déduire un encadrement de $I = \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1+x} dx$ d'amplitude strictement inférieure à 10^{-1}

Exercice 14.13 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 e^{1-x}$. On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique $2cm$.

- (a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour f peut-on en tirer?
 - (b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. déterminer sa fonction dérivée f' .
 - (c) Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathcal{C}$
2. Soit n un entier naturel. On considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.
On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.
 - (a) Calculer I_0 , I_1 et I_2
 - (b) Donner une interprétation graphique du nombre I_2 . On la fera apparaître sur le graphique de la question 1.c.
 3. (a) Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$
 - (b) En déduire un encadrement de I_n , puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.